

MATH I FULL-SCORE NOTES

考研数学一满分学习笔记与题解库

Soren

2026 年 7 月 16 日

目录

1 高等数学	3
1.1 第1讲函数极限与连续	3
1.2 反函数的定义、存在条件与图像关系	3
1.3 反双曲正弦型函数的反函数	6
1.4 复合函数的定义、定义域与拆解方法	9
1.5 隐函数的概念与观察法	16
1.6 函数的有界性	18
1.7 有界性放缩练习组	21
1.8 函数的单调性	24
1.9 函数的奇偶性	27
1.10 函数的周期性	30
1.11 由复合形式反求函数表达式	34
1.12 互换 x 与 $\frac{1}{x}$ 建立方程组求函数	36
1.13 第2讲数列极限	39
1.14 第3讲一元函数微分学的概念	39
1.15 第4讲一元函数微分学的计算	39
1.16 第5讲一元函数微分学的应用(一)——几何应用	39
1.17 第6讲一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式	40
1.18 第7讲一元函数微分学的应用(三)——物理应用与经济应用	40
1.19 第8讲一元函数积分学的概念与性质	40
1.20 第9讲一元函数积分学的计算	40
1.21 第10讲一元函数积分学的应用(一)——几何应用	41
1.22 第11讲一元函数积分学的应用(二)——积分等式与积分不等式	41
1.23 第12讲一元函数积分学的应用(三)——物理应用与经济应用	41
1.24 第13讲多元函数微分学	41
1.25 第14讲二重积分	42
1.26 第15讲微分方程	42
1.27 第16讲无穷级数(仅数学一、数学三)	42
1.28 第17讲多元函数积分学的预备知识(仅数学一)	42
1.29 第18讲多元函数积分学(仅数学一)	43

1.30	附录 1 图像变换	43
1.31	附录 2 常用平面图形	43
1.32	附录 3 常用空间图形	43
1.33	附录 4 重要公式	43
1.34	附录 5 从指数函数到双曲函数	44
1.35	附录 6 变形技巧	44
2	线性代数	45
2.1	第 0 讲零基础课——线性代数入门	45
2.2	第 1 讲行列式	45
2.3	第 2 讲矩阵	45
2.4	第 3 讲向量组	45
2.5	第 4 讲线性方程组	46
2.6	第 5 讲特征值与特征向量	46
2.7	第 6 讲二次型	46
3	概率论与数理统计	47
3.1	第 1 讲随机事件与概率	47
3.2	第 2 讲一维随机变量及其分布	47
3.3	第 3 讲多维随机变量及其分布	47
3.4	第 4 讲随机变量的数字特征	47
3.5	第 5 讲大数定律与中心极限定理	48
3.6	第 6 讲数理统计	48
A	索引	49
A.1	题目索引	49
A.2	方法索引	49
A.3	错题与错因索引	53
A.4	公式索引	53

1 高等数学

1.1 第1讲函数极限与连续

知识点

教材页码：第1页起。

本讲用于整理函数、函数极限、无穷小比较、连续性与间断点等内容。新增题目时重点沉淀极限入口、等价替换条件、单侧极限和连续性判定。

1.2 反函数的定义、存在条件与图像关系

索引：反函数

知识点

概念定位：

反函数属于函数基础中的“对应关系”问题。本质不是计算技巧，而是判断一个函数值能否唯一反推出原来的自变量。后续求反函数、反函数求导、复合函数化简、图像对称和定义域值域问题都会用到它。

定义：

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，值域为 R 。如果对每一个 $y \in R$ ，在 D 中都存在唯一的 x ，使得

$$y = f(x),$$

则可以由 y 唯一确定 x 。这时定义新函数

$$x = \varphi(y),$$

称它为 $y = f(x)$ 的反函数，通常记作

$$x = f^{-1}(y).$$

反函数的定义域是原函数的值域 R ，反函数的值域是原函数的定义域 D 。

直觉解释：

原函数是“输入 x ，得到 y ”；反函数是“已知输出 y ，倒推输入 x ”。所以反函数存在的核心要求是：同一个输出不能来自两个不同输入。若存在 $x_1 \neq x_2$ ，但 $f(x_1) = f(x_2)$ ，那么只知道 y 时就无法判断原来的输入到底是 x_1 还是 x_2 ，反函数就不存在。

存在条件：

函数有反函数的充要条件是它在定义域上是一一对应，即

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

严格单调函数一定一一对应，所以严格单调是反函数存在的充分条件。但它不是必要条件：有反函数的函数不一定在整个定义域上单调。

典型例子一：限制定义域后才有反函数

函数 $y = x^2$ 若定义在全体实数上，则 $f(1) = f(-1) = 1$ ，同一个函数值 1 对应两个不同自变量，因此没有反函数。

如果把定义域限制为 $[0, +\infty)$ ，则 $y = x^2$ 严格递增，且值域为 $[0, +\infty)$ ，于是有反函数

$$x = \sqrt{y}.$$

按通常习惯把反函数也写成以 x 为自变量，就得到

$$y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

这说明：很多函数不是天然没有反函数，而是需要先选定一个能保证一一对应的定义域分支。

典型例子二：有反函数不一定单调

设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x \geq 0$ 时，函数值落在 $[0, +\infty)$ ；当 $x < 0$ 时，函数值落在 $(-\infty, 0)$ 。两段的值域不重叠，且每段内部都不会出现同一个函数值对应两个自变量，所以它是一一对应的，有反函数。事实上它的反函数就是它本身。

但这个函数在整个定义域上不是单调函数。例如在负半轴上， $1/x$ 是递减的，而在非负半轴上， x 是递增的；跨过 0 时又不是一个统一的单调趋势。因此“严格单调必有反函数”可以用，“有反函数必严格单调”不能用。

图像关系：

若把

$$x = f^{-1}(y)$$

和

$$y = f(x)$$

画在同一坐标系中，它们其实表示同一批点，只是从不同方向描述同一个对应关系。

若把反函数改写成标准函数形式 $y = f^{-1}(x)$ ，相当于把原关系中的 x 与 y 互换。因此 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线

$$y = x$$

对称。

判别方法：

- 铅直线判定函数：任意一条铅直线与图像至多一个交点，图像才表示 y 是 x 的函数。

- 水平线判定反函数：在已经是函数的前提下，任意一条水平线与图像至多一个交点，函数才有反函数。

求反函数五步法：

1. 写出原函数 $y = f(x)$ ，并明确原定义域 D 。
2. 由方程 $y = f(x)$ 解出 x ，得到 $x = \varphi(y)$ 。
3. 检查解出的 x 是否唯一；若不唯一，要限制定义域或分支。
4. 交换字母 x, y ，写成 $y = f^{-1}(x)$ 。
5. 写明反函数的定义域和值域：反函数定义域为原函数值域，反函数值域为原函数定义域。

重要关系：

若 $f : D \rightarrow R$ 一一对应，且反函数为 $f^{-1} : R \rightarrow D$ ，则

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in R.$$

写这些恒等式时必须带着变量范围理解：第一个式子里的 x 来自原函数定义域，第二个式子里的 y 来自原函数值域。

常见误区：

- $f^{-1}(x)$ 表示反函数，不表示 $\frac{1}{f(x)}$ 。
- 只说“单调所以有反函数”时，要确认是在整个给定定义域上严格单调。
- 求反函数后忘记写定义域和值域，会在根式、对数和分段函数中丢分。
- 图像对称关系只适用于 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ ，不是 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 两条不同曲线关于 $y = x$ 对称。

易错点

满分复盘提醒：

- 判断反函数存在时，第一句话应落到“一一对应”，不要只背“单调”。
- 看到 x^2 、三角函数、根式函数时，优先检查是否需要限制定义域分支。
- 看到 $f^{-1}(f(x))$ 或 $f(f^{-1}(x))$ 时，先检查内层函数值是否落在外层函数定义域内。
- 画图题中要区分铅直线判定“是不是函数”和水平线判定“有没有反函数”。

1.3 反双曲正弦型函数的反函数

题目

题目编号: MATH1-CALC-0003 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.3

题型: 求反函数表达式与定义域 难度: 基础

知识点: 反函数, 对数性质, 有理化, 双曲函数

题目:

求函数

$$y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

的反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式及其定义域。

题解

思路入口:

本题表面上是“从

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

中解出 x ”，但若直接去解含根式方程，容易把式子平方得很繁。更好的入口是注意到

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1.$$

也就是说， $x + \sqrt{x^2 + 1}$ 的倒数正好是 $\sqrt{x^2 + 1} - x$ 。这会把对数式变成一对互补关系：

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

从思维上看，这仍然是方程组思维：把 x 和 $\sqrt{x^2 + 1}$ 暂时看成两个需要消元的对象，通过两条同源方程联立，最后用相减消去根式。

详细解答:

由题设

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

因为 $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$ ，所以

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > 0,$$

对数对任意实数 x 都有意义。两边取指数，得

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}. \quad (1)$$

再看 $-y$ 。由对数性质

$$-y = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

对分母有理化:

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

所以

$$-y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x),$$

进而

$$e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x. \quad (2)$$

此时 (1), (2) 可以看成关于 x 与 $\sqrt{x^2 + 1}$ 的二元一次方程组. 用 (1) - (2), 根式项抵消:

$$e^y - e^{-y} = 2x.$$

因此

$$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

这已经把原来的自变量 x 表示成了函数值 y 的函数, 即

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

按通常书写习惯, 将自变量记回 x , 得到

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

定义域与值域:

原函数的定义域为

$$(-\infty, +\infty).$$

由

$$\eta = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

可知, 对任意 $y \in \mathbb{R}$, 都能找到唯一实数 η 使 $f(\eta) = y$. 所以原函数值域为 $\mathbb{R}$, 反函数的定义域为

$$(-\infty, +\infty).$$

对应地, 反函数的值域等于原函数定义域, 也是

$$(-\infty, +\infty).$$

于是最终答案为

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in (-\infty, +\infty)}.$$

为什么它一定有反函数:

本题不只要会算, 还要知道为什么可以谈反函数. 函数

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

是严格递增函数。可以从反函数表达式看出, $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 对每个 $y \in \mathbb{R}$ 都给出唯一的 x ; 也可以在后续学到导数后验证

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0.$$

因此原函数一一对应, 有反函数。

考场满分写法:

必须写:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

其中第二式要通过倒数有理化说明:

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

然后相减得

$$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

最后交换 x, y , 并写出

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

可以略写的是原函数单调性的详细证明, 但不能漏掉反函数定义域。

答案:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

知识点

核心知识点:

函数

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

常记为反双曲正弦函数 $\operatorname{arsinh} x$, 它的反函数是双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

本题不是要求记忆函数名, 而是要掌握有理化消根号的结构:

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1.$$

可迁移方法:

遇到

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

这类结构时，优先尝试对倒数有理化，构造 e^y 与 e^{-y} 。若根式前后正负号互补，通常相加或相减可以消去根式或消去 x 。

这类题的本质不是单纯“有理化技巧”，而是“制造第二个方程，再联立消元”的方程组思维。只不过第二个方程不是题目直接给的，而是由倒数有理化主动构造出来的。

母题模板：

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow \begin{cases} e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \\ e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x, \end{cases}$$

所以

$$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

易错点

易错点：

- **把反函数误认为倒数：** $f^{-1}(x)$ 是反函数，不是 $\frac{1}{f(x)}$ 。
- **硬平方导致计算膨胀：** 直接由 $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 移项平方也能做，但更容易漏项；本题最快入口是倒数有理化。
- **忘写定义域：** 反函数的定义域等于原函数的值域，本题为 $\mathbb{R}$ 。
- **对数合法性漏检：** 需要知道 $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ ，原函数才在全体实数上有定义。

复盘提醒：

看到 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，要立即联想到“倒数有理化”和“双曲正弦”。考场上不要先平方硬解，先写出 e^y 与 e^{-y} 这对式子。

1.4 复合函数的定义、定义域与拆解方法

索引：复合函数

知识点

概念定位：

复合函数属于函数基础中的“输入输出链条”问题。它真正考的不是把 $f(g(x))$ 这个符号背下来，而是看清楚：内层函数先把 x 变成中间变量 u ，外层函数再把 u 变成最终函数值 y 。

定义：

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 ，函数 $u = g(x)$ 在集合 D 上有定义，并且

$$g(D) \subset D_1.$$

则由

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

确定的函数称为由内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，其中 u 称为中间变量。

更一般地，如果没有预先给定集合 D ，则复合函数 $f \circ g$ 的自然定义域应写成

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

这句话非常重要：复合函数的定义域不是简单照抄内层函数定义域，而是“内层能算，且内层输出能送进外层”。

直觉解释：

复合函数就是一条流水线：

$$x \xrightarrow{g} u = g(x) \xrightarrow{f} y = f(u).$$

所以做复合函数题时，第一眼不是展开计算，而是先问两个问题：

第一，内层输出是什么？ 第二，这个输出落入外层函数的哪一段或哪个定义域？

使用条件：

- 内层函数 $g(x)$ 必须在当前 x 上有定义。
- 内层函数值 $g(x)$ 必须属于外层函数 f 的定义域。
- 若外层函数是分段函数，判断分段条件时看的是内层输出 $g(x)$ ，不是原来的 x 。
- 若由 $f[\varphi(x)]$ 反求 $\varphi(x)$ ，要把 $\varphi(x)$ 当成整体变量，并用附加条件确定分支。

常见题型：

- 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，求 $f[g(x)]$ 、 $g[f(x)]$ 。
- 已知 $f[\varphi(x)]$ ，反求中间函数 $\varphi(x)$ 。
- 外层或内层为分段函数时，求复合函数表达式。
- 求复合函数的定义域和值域。

常见误区：

- 只看原来的 x 属于哪一段，而忘记外层函数看的是内层输出。
- 已知 $f[\varphi(x)]$ 时，把 x 直接代入 $f(x)$ ，没有把 $\varphi(x)$ 当作整体。
- 求定义域时只管根号、分母和对数，却漏掉外层函数对内层输出的限制。
- 从平方关系反求中间函数时忘记正负分支。

题目

题目编号: MATH1-CALC-0004 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.4

题型: 已知 $f[\varphi(x)]$ 反求中间函数 难度: 基础

知识点: 复合函数, 整体视角, 定义域, 值域, 平方根分支

题目:

设

$$f(x) = x^2, \quad f[\varphi(x)] = -x^2 + 2x + 3,$$

且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域和值域。

题解

思路入口:

本题的关键是把 $\varphi(x)$ 看成一个整体。因为外层函数是

$$f(t) = t^2,$$

所以

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2.$$

题目已经给出 $f[\varphi(x)]$, 于是先得到关于整体 $\varphi(x)$ 的平方方程, 再由 $\varphi(x) \geq 0$ 选择非负根。

详细解答:

由 $f(x) = x^2$, 可知对任意中间变量 t ,

$$f(t) = t^2.$$

令 $t = \varphi(x)$, 则

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2.$$

由题设

$$[\varphi(x)]^2 = -x^2 + 2x + 3.$$

又因为题目给出 $\varphi(x) \geq 0$, 所以只能取非负平方根:

$$\varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}.$$

定义域:

为了使 $\varphi(x)$ 为实值函数, 根号内必须非负:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0.$$

等价于

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0,$$

即

$$(x-3)(x+1) \leq 0.$$

所以

$$-1 \leq x \leq 3.$$

故 $\varphi(x)$ 的定义域为

$$[-1, 3].$$

值域:

将根号内配方:

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4.$$

当 $x \in [-1, 3]$ 时, 二次函数

$$-(x-1)^2 + 4$$

在 $x=1$ 处取得最大值 4, 在端点 $x=-1, 3$ 处取得最小值 0。因此

$$-x^2 + 2x + 3 \in [0, 4].$$

开平方后

$$\varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \in [0, 2].$$

故 $\varphi(x)$ 的值域为

$$[0, 2].$$

合法性检查:

第一, $\varphi(x) \geq 0$ 是选取正平方根的依据; 如果没有这个条件, 仅由 $[\varphi(x)]^2 = -x^2 + 2x + 3$ 不能唯一确定 $\varphi(x)$ 。第二, 定义域必须来自根号内非负, 而不是原外层函数 $f(x) = x^2$ 的定义域, 因为真正要求的是 $\varphi(x)$ 这个函数的表达式。

考场满分写法:

必须写:

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2 = -x^2 + 2x + 3.$$

由 $\varphi(x) \geq 0$, 得

$$\varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}.$$

再由

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

得定义域

$$[-1, 3].$$

最后配方

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

得值域

$$[0, 2].$$

答案:

$$\varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}, \quad D_\varphi = [-1, 3], \quad R_\varphi = [0, 2].$$

知识点

核心知识点:

已知 $f[\varphi(x)]$ 且外层函数 f 明确时, 要把 $\varphi(x)$ 当成整体。若

$$f(t) = t^2,$$

则

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2.$$

可迁移方法:

遇到 $f[\varphi(x)]$ 反求 $\varphi(x)$, 按三步走:

识别外层函数 $\rightarrow$ 把内层整体代入 $\rightarrow$ 按附加条件选分支.

如果外层函数不是一一对应函数, 例如平方函数, 就必须格外关注分支条件。

易错点

易错点:

- 漏掉正负分支: 从 $[\varphi(x)]^2 = G(x)$ 不能直接推出 $\varphi(x) = \sqrt{G(x)}$, 本题能这样写是因为 $\varphi(x) \geq 0$ 。
- 定义域判断不完整: $\varphi(x)$ 的表达式含根号, 必须要求 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ 。
- 值域只看端点: 根号内是开口向下的二次函数, 最大值在 $x = 1$, 不能只代端点。

复盘提醒:

这题的母题是“已知外层函数和复合结果, 反求内层函数”。核心动作不是展开, 而是把内层函数当成一个整体未知量。

题目

题目编号: MATH1-CALC-0005 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.5

题型: 分段函数复合 难度: 基础

知识点: 复合函数, 分段函数, 内层函数取值范围, 数形结合

题目:

设

$$g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x-1, & x \geq 0, \end{cases}$$

则求 $g[f(x)]$ 。

题解

思路入口：

这是分段函数复合题。关键不是看原来的 x 是否大于 0 后直接套 g ，而是先算内层函数

$$u = f(x),$$

再判断 u 落在 g 的哪一段。也就是说，外层 g 的分段条件看的是 $f(x) \leq 0$ 还是 $f(x) > 0$ ，不是看原来的 $x \leq 0$ 还是 $x > 0$ 。

详细解答：

外层函数 g 的分段规则是

$$g(u) = \begin{cases} 2-u, & u \leq 0, \\ 2+u, & u > 0. \end{cases}$$

因此

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2+f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

现在判断 $f(x)$ 的符号。

当 $x \geq 0$ 时，

$$f(x) = -x-1 \leq -1 < 0.$$

所以此时 $f(x) \leq 0$ ，应代入 g 的第一段：

$$g[f(x)] = 2-f(x) = 2-(-x-1) = x+3.$$

当 $x < 0$ 时，

$$f(x) = x^2 > 0.$$

所以此时 $f(x) > 0$ ，应代入 g 的第二段：

$$g[f(x)] = 2+f(x) = 2+x^2.$$

综上，

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 3+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

合法性检查：

内层函数 $f(x)$ 在全体实数上有定义，外层函数 $g(x)$ 也在全体实数上有定义，所以复合函数 $g[f(x)]$ 的定义域为

$$\mathbb{R}.$$

边界点 $x = 0$ 必须归入 f 的第二段，因为题设为 $x \geq 0$ 。此时

$$f(0) = -1 \leq 0,$$

所以外层 g 取第一段，得到

$$g[f(0)] = 3.$$

这与公式 $3 + x$ 在 $x = 0$ 的取值一致。

考场满分写法：

必须先写：

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2 + f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

再判断：

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

最后代回得

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 3 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

答案：

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 3 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

知识点

核心知识点：

分段复合函数的核心是“内层决定外层落段”。若要求 $g[f(x)]$ ，则 g 的分段条件要用 $f(x)$ 去判断。

可迁移方法：

遇到分段函数复合，按四步走：

写外层分段规则 $\rightarrow$ 把外层输入换成内层函数 $\rightarrow$ 判断内层函数落段 $\rightarrow$ 代回化简。

如果内层函数本身也是分段函数，建议先画图或列符号表。图像能快速告诉我们内层输出落在正半轴、负半轴还是跨越分段点。

易错点

易错点：

- **看错分段变量：**求 $g[f(x)]$ 时， g 的分段依据是 $f(x)$ ，不是原来的 x 。
- **边界点归属错误：** $x = 0$ 应先归入 $f(x) = -x - 1$ ，再判断 $f(0) = -1 \leq 0$ 。
- **分段顺序混乱：**先判断内层 $f(x)$ 的符号，再代入外层 g ，不要把两层函数的分段条件揉在一起。

复盘提醒：

这题要练成条件反射：复合函数先看内层输出。外层函数问“我的输入落在哪一段”，这个输入不是 x ，而是 $f(x)$ 。

1.5 隐函数的概念与观察法

索引：隐函数

知识点

概念定位：

隐函数属于“变量关系”问题。显函数直接写成 $y = f(x)$ ，输入 x 后能直接算出 y ；隐函数则先给出一个方程

$$F(x, y) = 0,$$

它把 x, y 捆在一起。若在某个区间内每个 x 都能唯一确定一个 y ，则这个方程在该区间上确定了一个隐函数

$$y = y(x).$$

定义：

设方程 $F(x, y) = 0$ 。如果当 x 在某区间 I 内取任一值时，总存在唯一的 y 满足该方程，则称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y = y(x)$ 。

为什么“唯一”是关键：

隐函数不是说方程里同时有 x, y 就行，而是要由 x 唯一反推出 y 。如果某个 x 对应两个不同的 y ，那描述的是多值关系，不能直接称为一个函数 $y = y(x)$ 。这和反函数中的“一一对应”是同一种底层思想。

显化与不易显化：

有些隐函数容易显化。例如

$$x + y^3 - 1 = 0$$

可以改写为

$$y = \sqrt[3]{1-x}.$$

有些隐函数不容易显化，例如

$$\sin(xy) = \ln \frac{x+e}{y} + 1.$$

这类方程很难整理成 $y = y(x)$ 的显式表达，但在局部仍可能确定隐函数。后续学习隐函数求导时，常常不需要显化，只要直接对方程两边求导。

特殊点求值的观察法：

如果只要求某个点的函数值 $y(x_0)$ ，不一定要解出整个 $y = y(x)$ 。把 $x = x_0$ 代入方程后，若关于 y 的方程容易观察出唯一解，就直接求该点函数值。

例如，方程

$$\ln y - \frac{x}{y} + x = 0, \quad x > 0$$

确定 $y = y(x)$ 。当 $x = 2$ 时，方程化为

$$\ln y - \frac{2}{y} + 2 = 0.$$

令

$$h(y) = \ln y - \frac{2}{y} + 2, \quad y > 0.$$

直接观察 $y = 1$ 时

$$h(1) = 0 - 2 + 2 = 0.$$

若要补足唯一性，可看

$$h'(y) = \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} > 0,$$

所以 $h(y)$ 在 $y > 0$ 上严格递增，零点唯一。因此

$$y(2) = 1.$$

再如，方程

$$\ln y + e^{y-1} = \frac{x}{2}$$

确定 $y = y(x)$ 。当 $x = 2$ 时，

$$\ln y + e^{y-1} = 1.$$

令

$$k(y) = \ln y + e^{y-1}, \quad y > 0.$$

观察得

$$k(1) = 0 + 1 = 1.$$

又因为

$$k'(y) = \frac{1}{y} + e^{y-1} > 0,$$

所以解唯一，故

$$y(2) = 1.$$

常见误区：

- 看到 $F(x, y) = 0$ 就默认一定有隐函数，忽略了唯一性。
- 为了求一个点 $y(x_0)$ ，强行解出整条函数表达式，计算反而变繁。
- 混淆“隐函数存在”和“能显式写出”。很多隐函数可以存在，但未必容易显化。

1.6 函数的有界性

索引：有界性

知识点

概念定位：

有界性回答的是：函数值在某个指定区间内会不会无限跑远。它不是单个点的性质，而是函数在一个集合或区间上的整体性质。

定义：

设 $f(x)$ 的定义域为 D ，数集 $I \subset D$ 。如果存在正数 M ，使得对任意 $x \in I$ ，都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界。

直觉解释：

几何上，若在区间 I 内，函数图像能被两条水平直线

$$y = M, \quad y = -M$$

夹住，则函数在 I 上有界。

使用条件：

讨论有界性必须先明确区间 I 。同一个函数在不同区间上有界性可能不同，例如

$$y = \frac{1}{x}$$

在 $(2, +\infty)$ 上有界，但在 $(0, 2)$ 上无界。

无界的常见判据：

如果在区间 I 内或端点附近存在点 x_0 ，使得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

则函数在该区间上无界。因为任意大的水平线都无法把图像夹住。

题目

题目编号：MATH1-CALC-0006 索引：索引 来源：用户图片 / 教材例 1.6

题型：证明函数有界 难度：基础

知识点：有界性，绝对值，基本不等式，放缩

题目：

证明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

题解

思路入口：

证明有界的目标是找到一个常数 M ，使得

$$|f(x)| \leq M$$

对所有实数 x 都成立。本题分母 $1+x^2$ 永远为正，关键是把

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \right|$$

放缩到一个常数。自然想到基本不等式或

$$1+x^2 \geq 2|x|.$$

详细解答一：用基本不等式

当 $x = 0$ 时，

$$f(0) = 0.$$

当 $x \neq 0$ 时，

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2}.$$

分子分母同除以 $|x|$ ，得

$$|f(x)| = \frac{1}{\frac{1}{|x|} + |x|}.$$

由基本不等式

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0,$$

令 $a = |x|$ ，得

$$\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2.$$

因此

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

结合 $x = 0$ 的情况，对任意 $x \in \mathbb{R}$ ，都有

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

详细解答二：直接放缩

由

$$\frac{1+x^2}{2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$$

可得

$$1+x^2 \geq 2|x|.$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}.$$

当 $x = 0$ 时, 仍有 $f(0) = 0$ 。综上,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

合法性检查:

第一, 分母 $1+x^2 > 0$, 所以函数在全体实数上有定义。第二, 第一种方法中除以 $|x|$ 前必须单独处理 $x = 0$ 。第三, 证明有界不要求找到最小的 M , 只要找到一个可行的上界即可; 本题实际可取 $M = \frac{1}{2}$ 。

考场满分写法:

写出

$$1+x^2 \geq 2|x|.$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}.$$

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$ 。故对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

答案:

$|f(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ 故 } f(x) \text{ 有界.}$

知识点

核心知识点:

证明有界的本质是找 M 。对于有理函数

$$\frac{x}{1+x^2},$$

常用入口是

$$1+x^2 \geq 2|x|.$$

可迁移方法:

遇到形如

$$\frac{|x|}{1+x^2}$$

的结构，优先考虑把分母放缩为 $2|x|$ 。如果分母分子都含 x ，还要特别注意 $x=0$ 是否需要单独处理。

为什么放缩优先于极值法：

本题当然也可以用后续导数方法：先讨论

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

的单调性，再找极值点，最后得到最大绝对值。但在“只需证明有界”的题里，这条路过重。放缩法直接给出

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2},$$

等于绕开了“求导、分区间、找极值、比较端点”的整套流程。考场上，若题目只问“有界”或“估值”，优先想放缩；若题目问“最大值、最小值、取等条件”，再考虑极值法。

易错点

易错点：

- 忘记先取绝对值：有界性通常用 $|f(x)| \leq M$ 表示，而不是只证明 $f(x) \leq M$ 。
- 除以 $|x|$ 时漏掉 $x=0$ ： $|x|=0$ 时不能作为除数。
- 误以为必须求最小上界：证明有界只需找到一个 M ，不一定要最小。

复盘提醒：

看到“证明有界”，先把目标翻译成“找 M ”。本题要记住标准放缩：

$$1+x^2 \geq 2|x|.$$

1.7 有界性放缩练习组

题目

题目编号：MATH1-CALC-0010 索引：索引 来源：用户要求生成 / 放缩练习
 题型：放缩证明有界与估值 难度：基础到中等
 知识点：有界性，基本不等式，分母放缩，有理化

练习要求：

以下题目尽量不要先求导。先把目标翻译成“找一个统一上界”，再尝试用放缩完成。

1. 证明函数

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

2. 证明函数

$$f(x) = \frac{|x|}{1+x^2+x^4}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

3. 证明对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$0 < \sqrt{x^2+1} - |x| \leq 1.$$

4. 证明函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

5. 设 $x > 0$, 证明

$$\frac{x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

题解

提示与答案:

1. 用

$$1+x^4 \geq 2x^2$$

得

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

2. 分母越大, 正分式越小。可先丢掉 x^4 , 用

$$1+x^2+x^4 \geq 1+x^2 \geq 2|x|$$

得

$$0 \leq \frac{|x|}{1+x^2+x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

注意 $x=0$ 时原式为 0, 不需要除以 $|x|$ 。

3. 用有理化:

$$\sqrt{x^2+1} - |x| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + |x|}.$$

分母大于等于 1, 所以

$$0 < \sqrt{x^2+1} - |x| \leq 1.$$

补充: 若在分情况时遇到

$$\sqrt{x^2+1} + x < 1,$$

必须先说明这是在 $x < 0$ 的情况下讨论。因为当 $x < 0$ 时, $|x| = -x$, 所以

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{x^2 + 1} - |x|.$$

用有理化可得

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}.$$

此时 $x < 0$, 故 $-x > 0$, 分母

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \sqrt{x^2 + 1} + |x| > 1,$$

所以

$$0 < \sqrt{x^2 + 1} + x < 1.$$

注意: 若不加 $x < 0$ 这个条件, 原不等式不成立; 例如 $x = 0$ 时左边等于 1。

4. 取绝对值:

$$|f(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

因为 $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$, 所以

$$|f(x)| < 1.$$

因此 $f(x)$ 有界。

5. 用

$$(1 + x)^2 \geq 4x, \quad x > 0,$$

得

$$\frac{x}{(1 + x)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

复盘重点:

第 1、2、5 题练“分母放大, 正分式变小”; 第 3 题练“根式差有理化”; 第 4 题练“根式分母天然大于 $|x|$ ”。这些都是有界性题中替代求导极值法的常用入口。

易错点

易错点:

- 正分式中, 分母放大后分式变小; 如果分母或分子可能为负, 必须先处理符号。
- 含 $|x|$ 的放缩常要单独检查 $x = 0$, 避免非法约分。
- 根式差 $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$ 不要硬估, 优先有理化。

复盘提醒:

做完后不要只看答案对不对, 要给每题标出“触发信号”: 分母有 $1 + x^4$ 、分母有 $1 + x^2$ 、根式差、根式分母、 $(1 + x)^2$ 。以后看到这些结构, 直接调用对应放缩模板。

1.8 函数的单调性

索引：单调性

知识点

概念定位：

单调性描述函数在区间上随自变量增大时的整体变化趋势。它仍然是区间性质，不是单点性质。

定义：

设 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subset D$ 。如果对任意 $x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加。

如果对任意 $x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上严格单调减少。

乘积判别式：

对任意 $x_1, x_2 \in I$ ， $x_1 \neq x_2$ ，有

$$f(x) \text{ 严格单调增加} \iff (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0.$$

有

$$f(x) \text{ 严格单调减少} \iff (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0.$$

为什么这个判别式成立：

若 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 - x_2 < 0$ 。严格递增时 $f(x_1) < f(x_2)$ ，所以

$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

两个负数相乘为正，故乘积大于 0。这正是“自变量差”和“函数值差”同号的意思。

常见误区：

- 单调性必须说明在哪个区间上讨论。
- 后续常用导数判断单调性，但定义法和乘积判别式在没有导数时同样重要。
- 图像变换会改变单调性： $f(-x)$ 通常与 $f(x)$ 单调性相反，而 $-f(-x)$ 又会再反一次。

题目

题目编号: MATH1-CALC-0007 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.7

题型: 单调性与图像变换 难度: 中等

知识点: 单调性定义, 图像对称, 复合与变号

题目:

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 任给 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$, 均有

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0.$$

则以下函数一定单调增加的是

$$(A) |f(x)|, \quad (B) f(|x|), \quad (C) f(-x), \quad (D) -f(-x).$$

题解

思路入口:

题设给出的不是导数, 而是单调性的乘积判别式。它表示 $f(x)$ 在全体实数上严格单调增加。接下来要看四个变换对单调性的影响: 取绝对值、输入取绝对值、横向反射、先横向反射再纵向反射。

详细解答:

由题设

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$$

可知 $f(x)$ 是严格单调增加函数。

先看选项 (D)。令

$$F(x) = -f(-x).$$

任取 $x_1 < x_2$, 则

$$-x_1 > -x_2.$$

因为 f 严格单调增加, 所以

$$f(-x_1) > f(-x_2).$$

两边同时乘以 -1 , 不等号反向:

$$-f(-x_1) < -f(-x_2).$$

即

$$F(x_1) < F(x_2).$$

因此

$$-f(-x)$$

一定严格单调增加。

为什么其他选项不一定:

选项 (C) 中, $f(-x)$ 是把 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称。横向反射会把严格递增变成严格递减, 所以不符合。

选项 (A) 中, $|f(x)|$ 会把 $f(x) < 0$ 的部分翻到 x 轴上方, 不一定保持单调。例如取 $f(x) = x$, 则

$$|f(x)| = |x|$$

在 $\mathbb{R}$ 上不是单调增加。

选项 (B) 中, $f(|x|)$ 会先把 $x < 0$ 的部分折到 $x > 0$, 通常得到偶函数, 不可能在整个实数轴上严格单调增加。例如取 $f(x) = x$, 则

$$f(|x|) = |x|$$

仍不是单调增加。

合法性检查:

题设中 f 在全体实数上有定义, 所以 $-x$ 、 $|x|$ 作为输入时都不会超出定义域。判断 (D) 时不能只凭图像直觉, 最好用定义法写出 $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ 。

考场满分写法:

由题设可知 f 严格单调增加。令

$$F(x) = -f(-x).$$

若 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1 > -x_2$ 。由 f 递增得

$$f(-x_1) > f(-x_2).$$

故

$$-f(-x_1) < -f(-x_2),$$

即 $F(x_1) < F(x_2)$, 所以 $F(x) = -f(-x)$ 严格单调增加。

答案:

D

知识点

核心知识点:

若 $f(x)$ 严格递增, 则

$$f(-x)$$

严格递减, 而

$$-f(-x)$$

严格递增。图像上看, $f(-x)$ 是关于 y 轴对称, $-f(-x)$ 是关于原点对称。

可迁移方法:

遇到单调性与图像变换题, 优先用定义法验证。设新函数为 $F(x)$, 任取 $x_1 < x_2$, 追踪输入变换后不等号如何变化, 再判断 $F(x_1)$ 与 $F(x_2)$ 的大小。

易错点

易错点:

- 把 $|f(x)|$ 误认为保持单调: 取绝对值会翻折负值部分, 可能破坏单调性。
- 把 $f(|x|)$ 误认为只限制定义域: 输入取绝对值会把左半轴折到右半轴, 整体通常不是单调函数。
- 漏掉两次反向: $x \mapsto -x$ 反一次单调性, 外面再乘 -1 又反一次, 所以 $-f(-x)$ 保持递增。

复盘提醒:

单调性题不要只看形状, 要能用定义法写出不等号链条。尤其是 $f(-x)$ 、 $-f(x)$ 、 $-f(-x)$ 三类变换, 要分别记清。

1.9 函数的奇偶性

索引: 奇函数

知识点

概念定位:

奇偶性是函数图像对称性的代数表达。偶函数图像关于 y 轴对称, 奇函数图像关于原点对称。

定义:

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即

$$x \in D \implies -x \in D.$$

如果对任意 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数。

如果对任意 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数。

判断奇偶性的第一步:

必须先检查定义域是否关于原点对称。若定义域不关于原点对称，通常不能谈奇偶性。

常用结构：

对任意函数 $f(x)$ ，在定义域允许的前提下，

$$f(x) + f(-x)$$

是偶函数，

$$f(x) - f(-x)$$

是奇函数。

进一步令

$$u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad v(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

则 $u(x)$ 是偶函数， $v(x)$ 是奇函数，且

$$f(x) = u(x) + v(x).$$

这说明任意函数都可以分解成“偶函数部分 + 奇函数部分”。

复合函数的奇偶性规则：

记忆口诀：

内层为偶，整体为偶；内层为奇，整体看外层。

也就是说，若 $g(x)$ 是偶函数，则 $f[g(x)]$ 通常为偶函数；若 $g(x)$ 是奇函数，则外层 f 为偶时整体为偶，外层 f 为奇时整体为奇。

导数与积分中的奇偶互换：

若 $f(x)$ 可导，则求导一次会使奇偶性互换：

$$f \text{ 奇} \Rightarrow f' \text{ 偶}, \quad f \text{ 偶} \Rightarrow f' \text{ 奇}.$$

若

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

则

$$f \text{ 奇} \Rightarrow F \text{ 偶}, \quad f \text{ 偶} \Rightarrow F \text{ 奇}.$$

题目

题目编号：MATH1-CALC-0008 索引：索引 来源：用户图片 / 教材例 1.8

题型：用定义证明奇函数 难度：基础

知识点：奇函数，函数方程，赋值法

题目：

设对任意 x, y , 都有

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

证明: $f(x)$ 是奇函数。

题解

思路入口:

要证明 $f(x)$ 是奇函数, 目标是证明

$$f(-x) = -f(x).$$

题设是对任意 x, y 成立的函数方程, 所以自然使用赋值法: 先令 $x = y = 0$ 求 $f(0)$, 再令 $y = -x$ 建立 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系。

详细解答:

令 $x = 0, y = 0$, 由题设

$$f(0+0) = f(0) + f(0).$$

即

$$f(0) = 2f(0),$$

所以

$$f(0) = 0.$$

再令 $y = -x$, 则

$$f(x+(-x)) = f(x) + f(-x).$$

左边为

$$f(0) = 0,$$

因此

$$0 = f(x) + f(-x).$$

所以

$$f(-x) = -f(x).$$

这正是奇函数的定义, 故 $f(x)$ 是奇函数。

合法性检查:

题目说“任意 x, y ”都成立, 说明函数定义域至少对这些加法操作封闭, 赋值 $x = y = 0$ 与 $y = -x$ 是合法的。证明奇函数时还需要默认定义域关于原点对称; 本题“任意 x, y ”的条件已保证 $-x$ 可以作为自变量参与讨论。

考场满分写法:

令 $x = y = 0$, 得

$$f(0) = 2f(0),$$

故

$$f(0) = 0.$$

再令 $y = -x$, 得

$$f(0) = f(x) + f(-x).$$

于是

$$f(-x) = -f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数。

答案:

$$f(-x) = -f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 是奇函数.}$$

知识点

核心知识点:

函数方程中出现“任意 x, y ”时, 优先尝试赋特殊值。证明奇函数常用

$$x + y = 0$$

来制造 $f(0)$ 。

可迁移方法:

遇到

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

这类加法型函数方程, 先求 $f(0)$, 再用 $y = -x$ 得到奇偶性或相反数关系。

易错点

易错点:

- 直接令 $y = -x$ 但忘记先求 $f(0)$: 需要先知道 $f(0) = 0$ 才能得到 $f(x) + f(-x) = 0$ 。
- 把奇函数误写成 $f(-x) = f(x)$: 这是偶函数条件。
- 忽略“任意”条件的作用: 正因为题设对任意 x, y 成立, 才可以自由赋值。

复盘提醒:

函数方程题的第一反应是“赋值”。常用三件套: 令变量为 0, 令两个变量互为相反数, 令两个变量相等。

1.10 函数的周期性

索引: 周期函数

知识点

概念定位:

周期性描述函数值按固定长度重复出现。它的本质是“平移不变”:

$$f(x+T) = f(x).$$

定义:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 。如果存在非零常数 T , 使得对任意 $x \in D$, 都有 $x+T \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的一个周期。通常所说“周期”多指最小正周期, 但证明题中只要证明某个 $T \neq 0$ 是周期即可。

重要结论:

- 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期, 其中 $a \neq 0$ 。
- 若 $g(x)$ 是周期函数, 则复合函数 $f[g(x)]$ 也是周期函数。
- 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期。
- 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

以 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T f(x) dx = 0.$$

常见误区:

- 证明 T 是周期, 不等于证明它是最小正周期。
- 递推式中出现 $x - \pi$ 或 $x + \pi$ 时, 要多次使用等式, 把函数值推回到同一个位置。
- 看到 $\sin(x + \pi) = -\sin x$ 、 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ 时, 要主动联想到抵消结构。

题目

题目编号: MATH1-CALC-0009 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.9

题型: 由递推关系证明周期性 难度: 基础

知识点: 周期函数, 递推式, 三角函数诱导公式

题目:

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足

$$f(x) = f(x - \pi) + \sin x.$$

证明: $f(x)$ 是以 $T = 2\pi$ 为周期的周期函数。

题解

思路入口:

要证明 2π 是周期, 只需证明

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

题设给的是一步后退 π 的关系, 所以对 $x + 2\pi$ 、 $x + \pi$ 连续使用题设, 把 $f(x + 2\pi)$ 逐步推回 $f(x)$ 。中间会出现

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

正好相互抵消。

详细解答:

由题设, 对任意实数 t , 有

$$f(t) = f(t - \pi) + \sin t.$$

令 $t = x + 2\pi$, 得

$$f(x + 2\pi) = f(x + \pi) + \sin(x + 2\pi).$$

再令 $t = x + \pi$, 得

$$f(x + \pi) = f(x) + \sin(x + \pi).$$

代入上式:

$$f(x + 2\pi) = f(x) + \sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi).$$

利用诱导公式

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

可得

$$\sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) = 0.$$

因此

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

故 2π 是 $f(x)$ 的一个周期。

合法性检查:

题设说明 $f(x)$ 在全体实数上满足关系式, 所以 $x + \pi$ 、 $x + 2\pi$ 都在定义域内, 递推代入合法。题目只要求证明 $f(x)$ 以 2π 为周期, 不要求证明 2π 是最小正周期。

考场满分写法:

由题设,

$$f(x + 2\pi) = f(x + \pi) + \sin(x + 2\pi).$$

又

$$f(x + \pi) = f(x) + \sin(x + \pi).$$

故

$$f(x + 2\pi) = f(x) + \sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) = f(x) - \sin x + \sin x = f(x).$$

所以 $f(x)$ 以 2π 为周期。

答案:

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{故 } 2\pi \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个周期.}$$

知识点

核心知识点:

由递推关系证明周期性时, 核心是“多次套用同一个等式, 把目标 $f(x+T)$ 拉回 $f(x)$ ”。
本题的抵消来自

$$\sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) = 0.$$

可迁移方法:

遇到

$$f(x) = f(x - a) + \varphi(x)$$

这类题, 要尝试连续迭代:

$$f(x + 2a), \quad f(x + a), \quad f(x),$$

观察新增项能否抵消。如果新增项是三角函数, 优先使用诱导公式。

易错点

易错点:

- 只套一次等式: 只写 $f(x + 2\pi) = f(x + \pi) + \sin(x + 2\pi)$ 还没有回到 $f(x)$ 。
- 诱导公式符号错: $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ 。
- 误以为要证明最小正周期: 本题只需证明 2π 是一个周期。

复盘提醒:

周期证明题先写目标 $f(x + T) = f(x)$ 。题设若是递推式, 就连续套用, 直到所有新增项抵消。

1.11 由复合形式反求函数表达式

题目

题目编号: MATH1-CALC-0001 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.1

题型: 已知 $f(\varphi(u))$ 反求 $f(x)$ 难度: 基础

知识点: 整体换元, 函数表示, $u + \frac{1}{u}$ 的值域

题目:

设

$$f\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u + u^3}{1 + u^4},$$

则当 $x \geq 2$ 时, 求 $f(x)$ 。

题面校注: 用户图片中分子首项疑似为 $-u$, 但图片所给参考答案 $\frac{x}{x^2-2}$ 对应的是分子为 $u + u^3$ 的版本。若分子确认为 $-u + u^3$, 则还需要指定 u 的取值分支, 否则 $f\left(u + \frac{1}{u}\right)$ 不能唯一确定。

题解

思路入口:

目标是求 $f(x)$, 已知的是 $f\left(u + \frac{1}{u}\right)$ 。所以不要把左右两边的 x 混用, 应先把原式中的自变量记作 u , 再把

$$t = u + \frac{1}{u}$$

看成一个整体。

详细解答:

由题设

$$f\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u + u^3}{1 + u^4}.$$

为了把右边也化成 $u + \frac{1}{u}$ 的形式, 对分子、分母同时除以 u^2 。这里要求 $u \neq 0$, 而 $u + \frac{1}{u}$ 本身也只在 $u \neq 0$ 时有意义:

$$\frac{u + u^3}{1 + u^4} = \frac{\frac{1}{u} + u}{\frac{1}{u^2} + u^2}.$$

又因为

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2,$$

所以

$$f\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u + \frac{1}{u}}{\left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2}.$$

令

$$t = u + \frac{1}{u},$$

则

$$f(t) = \frac{t}{t^2 - 2}.$$

题目要求 $x \geq 2$ 时的 $f(x)$, 于是把 t 换回 x , 得到

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \quad (x \geq 2).$$

补充解法：反解参数后消元

也可以先把最终自变量记为 t , 令

$$t = u + \frac{1}{u} \quad (t \geq 2).$$

这等价于

$$u^2 - tu + 1 = 0.$$

由此可得

$$1 + u^2 = tu.$$

于是

$$u + u^3 = u(1 + u^2) = tu^2.$$

另一方面, 由

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

可得

$$1 + u^4 = u^2(t^2 - 2).$$

所以

$$f(t) = \frac{u + u^3}{1 + u^4} = \frac{tu^2}{u^2(t^2 - 2)} = \frac{t}{t^2 - 2}.$$

因此

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \quad (x \geq 2).$$

关于显式解出 u 再代回:

也可以直接解二次方程

$$u^2 - tu + 1 = 0,$$

得到

$$u = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}.$$

但这里不能随意写成单值的 $u = \theta(t)$, 因为当 $t > 2$ 时有两个分支, 它们互为倒数。若将 u 换成 $\frac{1}{u}$, 则

$$\frac{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}}{1 + \frac{1}{u^4}} = \frac{u^3 + u}{u^4 + 1} = \frac{u + u^3}{1 + u^4},$$

所以本题两个分支代回右端得到同一个值，显式解根代回是可行的。只是直接代入根式会使运算变繁，考场上不如先用方程关系消元。

方法比较：本法本质上是先由 $t = u + \frac{1}{u}$ 建立 u 与 t 的方程关系，再用方程消去 u 。它能做，但比整体换元多了一层消元；考场上优先使用前一种整体改写法。若要显式写 $u = \theta(t)$ ，必须先说明分支对右端函数值没有影响。

答案：

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \quad (x \geq 2).$$

知识点

核心知识点：

已知 $f(\varphi(u))$ 时，关键不是先解出 u ，而是把右端改写成只含 $\varphi(u)$ 的形式。本题中

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2$$

是主要变形入口。

可迁移方法：

遇到 $u + \frac{1}{u}$ 、 $u - \frac{1}{u}$ 、 $u^2 + \frac{1}{u^2}$ 同时出现的题，优先考虑整体换元。若题目限定 $x \geq 2$ ，通常是在提示 x 可以作为 $u + \frac{1}{u}$ 的函数值。

易错点

易错点：

- 把题设中的参数 u 和最终要求的自变量 x 混成同一个变量。
- 只想到解方程 $x = u + \frac{1}{u}$ ，却忽略右端可以直接化成整体变量。
- 忘记检查题面符号：若分子是 $-u + u^3$ ，则右端为 $\frac{u - \frac{1}{u}}{u^2 + \frac{1}{u^2}}$ ，不能直接得到参考答案。

复盘提醒：

看到 $f\left(u + \frac{1}{u}\right)$ 这类题，先重命名参数，再问自己：右端能不能通过除以某个 u^k 造出 $u + \frac{1}{u}$ ？

1.12 互换 x 与 $\frac{1}{x}$ 建立方程组求函数

题目

题目编号: MATH1-CALC-0002 索引: 索引 来源: 用户图片 / 教材例 1.2

题型: 函数关系式中含 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 通过互换自变量建立方程组 难度: 基础

知识点: 定义域, 倒数代换, 二元一次方程组, 根式化简

题目:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足

$$2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}},$$

则求 $f(x)$ 。

题解

思路入口:

题设中同时出现 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 。要求的是 $f(x)$, 但题设只给出一个关系式, 未知量却可看作两个:

$$f(x), \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

因此自然的入口是把题设中的 x 换成 $\frac{1}{x}$, 再得到第二个方程, 联立消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 。

详细解答:

由题设, 对任意 $x > 0$, 有

$$2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (1)$$

因为定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $x > 0$ 时也有 $\frac{1}{x} > 0$, 所以可以在题设中把 x 换为 $\frac{1}{x}$, 得到

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}.$$

右端需要化简。由于 $x > 0$,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

因此

$$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\frac{1+2x}{x^2}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

于是得到第二个方程

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad (2)$$

为了消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 将 (2) 乘以 x^2 , 得

$$2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x(1+2x)}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (3)$$

再将 (1) 乘以 2, 得

$$4f(x) + 2x^2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + 4x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (4)$$

用 (4) - (3), 左端中 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 被消去:

$$3f(x) = \frac{2x^2 + 4x - x - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

所以

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0).$$

答案:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0).$$

知识点

核心知识点:

当函数关系式中同时出现 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 时, 常用办法是把 x 换成 $\frac{1}{x}$, 得到关于两个未知量的方程组:

$$f(x), \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

然后通过加减消元求出目标函数。

可迁移方法:

类似地, 若关系式中出现 $f(x)$ 与 $f(-x)$, 常用 $x \mapsto -x$; 若出现 $f(x)$ 与 $f(a-x)$, 常用 $x \mapsto a-x$ 。核心不是代换本身, 而是构造“同一组未知函数值”的方程组。

易错点

易错点:

- 忽略定义域: 本题能把 x 换成 $\frac{1}{x}$, 依赖于 $x > 0$ 时 $\frac{1}{x} > 0$ 。
- 根式化简漏掉正负: $\sqrt{x^2} = |x|$, 但本题 $x > 0$, 所以 $\sqrt{x^2} = x$ 。
- 消元倍数选错: 应让 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 前的系数相同, 再相减。

复盘提醒:

看到 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 同时出现, 先写两个未知量, 再做 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 的对偶代换, 最后联立消元。

1.13 第2讲数列极限

知识点

教材页码：第76页起。

本讲用于整理数列极限、单调有界准则、夹逼准则、递推数列极限和常见数列变形。新增题目时重点检查极限存在性、递推关系稳定点和放缩方向。

1.14 第3讲一元函数微分学的概念

知识点

教材页码：第99页起。

本讲用于整理导数定义、左右导数、可导与连续、微分概念和一元函数微分学的基本对象。新增题目时重点检查定义法、极限过程和可导条件。

1.15 第4讲一元函数微分学的计算

知识点

教材页码：第119页起。

本讲用于整理求导法则、高阶导数、隐函数求导、参数方程求导、反函数求导和微分计算。新增题目时重点沉淀复合链条、变量依赖关系和高阶导数结构。

1.16 第5讲一元函数微分学的应用（一）——几何应用

知识点

教材页码：第139页起。

本讲用于整理切线、法线、函数单调性、极值、最值、凹凸性、拐点、曲率及相关几何应用。新增题目时重点区分一阶导数、二阶导数在几何判定中的作用。

1.17 第6讲一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式

知识点

教材页码：第164页起。

本讲用于整理罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒公式、微分等式证明和微分不等式证明。新增题目时必须检查闭区间连续、开区间可导等使用条件。

1.18 第7讲一元函数微分学的应用(三)——物理应用与经济应用

知识点

教材页码：第186页起。

本讲用于整理变化率、边际量、弹性、优化模型和一元微分学在物理、经济中的应用。新增题目时重点明确变量含义、单位、定义域和最值条件。

1.19 第8讲一元函数积分学的概念与性质

知识点

教材页码：第195页起。

本讲用于整理原函数、不定积分、定积分定义、定积分性质、变上限积分函数和反常积分基础。新增题目时重点检查积分存在性、区间、奇偶性、周期性和收敛性。

1.20 第9讲一元函数积分学的计算

知识点

教材页码：第230页起。

本讲用于整理换元积分法、分部积分法、有理函数积分、三角代换、定积分计算技巧和反常积分计算。新增题目时重点沉淀凑微分、换元边界、分部策略和对称性。

1.21 第 10 讲一元函数积分学的应用（一）——几何应用

知识点

教材页码：第 263 页起。

本讲用于整理平面图形面积、旋转体体积、平行截面面积、弧长等几何应用。新增题目时重点画清图形、确定积分变量和上下限。

1.22 第 11 讲一元函数积分学的应用（二）——积分等式与积分不等式

知识点

教材页码：第 282 页起。

本讲用于整理积分等式证明、积分不等式证明、积分中值定理、估值和放缩。新增题目时重点检查被积函数符号、单调性、区间长度和中值定理条件。

1.23 第 12 讲一元函数积分学的应用（三）——物理应用与经济应用

知识点

教材页码：第 294 页起。

本讲用于整理功、水压力、引力、平均值、总量积累和经济应用。新增题目时重点明确微元、积分变量、单位和积分区间。

1.24 第 13 讲多元函数微分学

知识点

教材页码：第 304 页起。

本讲用于整理多元函数极限、连续、偏导、全微分、方向导数、梯度、隐函数和多元极值。新增题目时重点区分连续、偏导存在、可微之间的关系。

1.25 第 14 讲二重积分

知识点

教材页码：第 338 页起。

本讲用于整理二重积分概念、性质、直角坐标计算、极坐标计算、换序与变量替换。新增题目时重点画清区域、写清 Jacobian 和积分限。

1.26 第 15 讲微分方程

知识点

教材页码：第 377 页起。

本讲用于整理一阶微分方程、可降阶高阶方程、线性微分方程和常系数线性方程。新增题目时重点沉淀方程类型识别、通解结构和初值条件代入。

1.27 第 16 讲无穷级数（仅数学一、数学三）

知识点

教材页码：第 409 页起。

本讲用于整理常数项级数、正项级数、交错级数、绝对收敛、条件收敛、幂级数和傅里叶级数。新增题目时重点检查敛散性判别、收敛域和端点。

1.28 第 17 讲多元函数积分学的预备知识（仅数学一）

知识点

教材页码：第 464 页起。

本讲用于整理空间解析几何、向量运算、平面与直线、曲面与曲线、投影区域和多元积分前的几何预备知识。新增题目时重点沉淀图形识别、区域投影和法向方向。

1.29 第 18 讲多元函数积分学（仅数学一）

知识点

教材页码：第 488 页起。

本讲用于整理三重积分、曲线积分、曲面积分、格林公式、高斯公式和斯托克斯公式等数学一内容。新增题目时重点区分积分类型、方向、法向和边界条件。

1.30 附录 1 图像变换

知识点

教材页码：第 546 页起。

本附录用于整理平移、伸缩、对称、复合函数图像和反函数图像等图像变换规则。

1.31 附录 2 常用平面图形

知识点

教材页码：第 549 页起。

本附录用于整理考研数学一常见平面曲线、区域图形、面积公式和画图识别要点。

1.32 附录 3 常用空间图形

知识点

教材页码：第 552 页起。

本附录用于整理常见空间曲面、空间区域、投影方式和几何识别要点。

1.33 附录 4 重要公式

知识点

教材页码：第 555 页起。

本附录用于整理高等数学常用公式、使用条件和易错变形。新增公式时也应同步更新 `tex/indexes/formula_index.tex`。

1.34 附录 5 从指数函数到双曲函数

知识点

教材页码：第 558 页起。

本附录用于整理指数函数、双曲函数、反双曲函数及其导数、积分和常见恒等式。

1.35 附录 6 变形技巧

知识点

教材页码：第 563 页起。

本附录用于整理代数变形、等价变形、放缩变形、构造函数和常见技巧入口。

2 线性代数

2.1 第 0 讲零基础课——线性代数入门

知识点

教材页码：第 1 页起。

本讲用于整理线性代数入门概念、基本符号、数乘与线性组合、初等运算和后续章节所需的预备语言。

2.2 第 1 讲行列式

知识点

教材页码：第 11 页起。

本讲用于整理行列式定义、性质、展开、计算技巧和克拉默法则。新增题目时重点沉淀化三角、按行列展开、递推行列式和参数判定。

2.3 第 2 讲矩阵

知识点

教材页码：第 45 页起。

本讲用于整理矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵、初等变换、矩阵秩和等价标准形。新增题目时重点检查矩阵维度、可逆条件和初等变换对象。

2.4 第 3 讲向量组

知识点

教材页码：第 82 页起。

本讲用于整理向量组线性相关、线性无关、极大无关组、秩、向量空间与基。新增题目时重点区分向量组的秩、矩阵的秩和解空间维数。

2.5 第4讲线性方程组

知识点

教材页码：第114页起。

本讲用于整理齐次与非齐次线性方程组、解的判定、基础解系、通解结构和参数方程组。新增题目时重点检查秩条件和通解维数。

2.6 第5讲特征值与特征向量

知识点

教材页码：第139页起。

本讲用于整理特征值、特征向量、相似、对角化、实对称矩阵和二次型联系。新增题目时重点区分代数重数、几何重数和可对角化条件。

2.7 第6讲二次型

知识点

教材页码：第178页起。

本讲用于整理二次型矩阵表示、合同变换、标准形、规范形、正定性和惯性指数。新增题目时重点区分相似与合同，并检查正定判别条件。

3 概率论与数理统计

3.1 第 1 讲随机事件与概率

知识点

教材页码：第 1 页起。

本讲用于整理随机事件、事件关系、概率性质、古典概型、几何概型、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式和独立性。新增题目时重点检查事件拆分和独立性条件。

3.2 第 2 讲一维随机变量及其分布

知识点

教材页码：第 33 页起。

本讲用于整理离散型随机变量、连续型随机变量、分布函数、概率密度、常见分布和随机变量函数的分布。新增题目时重点区分分布函数、密度函数和取值范围。

3.3 第 3 讲多维随机变量及其分布

知识点

教材页码：第 62 页起。

本讲用于整理二维随机变量、联合分布、边缘分布、条件分布、独立性和二维随机变量函数分布。新增题目时重点检查积分区域、求和范围和独立性判定。

3.4 第 4 讲随机变量的数字特征

知识点

教材页码：第 103 页起。

本讲用于整理数学期望、方差、协方差、相关系数、矩和常见分布的数字特征。新增题目时重点检查存在性、线性性质和独立条件。

3.5 第 5 讲大数定律与中心极限定理

知识点

教材页码：第 125 页起。

本讲用于整理切比雪夫不等式、大数定律、中心极限定理和正态近似。新增题目时重点检查独立同分布、期望方差存在和标准化过程。

3.6 第 6 讲数理统计

知识点

教材页码：第 133 页起。

本讲用于整理总体、样本、统计量、抽样分布、参数估计、最大似然估计、矩估计、无偏性和置信区间。新增题目时重点检查统计量定义和似然函数构造。

A 索引

A.1 题目索引

知识点

- **MATH1-CALC-0001:** 由 $f\left(u + \frac{1}{u}\right)$ 反求 $f(x)$ 。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.1；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0002:** 由含 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的关系式求 $f(x)$ 。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.2；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0003:** 求 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ 的反函数。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.3；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0004:** 由 $f[\varphi(x)]$ 反求 $\varphi(x)$ 及定义域和值域。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.4；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0005:** 分段函数复合求 $g[f(x)]$ 。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.5；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0006:** 证明 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在全体实数上有界。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.6；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0007:** 由严格递增条件判断 $-f(-x)$ 一定单调增加。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.7；难度：中等；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0008:** 由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 证明 $f(x)$ 是奇函数。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.8；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0009:** 由 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$ 证明 2π 为周期。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户图片 / 教材例 1.9；难度：基础；状态：已整理。
- **MATH1-CALC-0010:** 有界性放缩练习组。章节：高等数学第 1 讲函数极限与连续；来源：用户要求生成 / 放缩练习；难度：基础到中等；状态：已整理。

A.2 方法索引

知识点

整体换元反求函数表达式

- **适用题型:** 已知 $f(\varphi(u))$ ，要求 $f(x)$ 或 $f(t)$ 。
- **触发特征:** 题设中出现 $u + \frac{1}{u}$ 、 $u - \frac{1}{u}$ 、 $u^2 + \frac{1}{u^2}$ 等可互相转化的结构。
- **核心步骤:** 先将原参数重命名，再把右端化成只含 $\varphi(u)$ 的表达式，最后令 $t = \varphi(u)$ 。

- 关联题目：MATH1-CALC-0001。

反解参数后消元

- 适用题型：已知 $f(\varphi(u))$ ，且 $\varphi(u) = t$ 可以转化为低次代数方程。
- 触发特征：内层变量如 $t = u + \frac{1}{u}$ 可化为 $u^2 - tu + 1 = 0$ ，从而用 $1 + u^2 = tu$ 等关系消去 u 。
- 核心步骤：先设 $t = \varphi(u)$ ，建立 u 与 t 的方程关系，再把右端分子分母分别化成含 t 的倍数，最后约去参数。
- 使用提醒：本法常比整体换元繁琐；也可显式解出 u 的分支后代回，但若不同分支会导致右端不同值，必须额外检查分支是否影响函数定义。
- 关联题目：MATH1-CALC-0001。

求反函数五步法

- 适用题型：已知 $y = f(x)$ ，要求写出 $f^{-1}(x)$ 或判断反函数的定义域、值域。
- 触发特征：题目要求“求反函数”“写出反函数表达式”，或需要从函数值唯一倒推自变量。
- 核心步骤：明确原定义域；由 $y = f(x)$ 解出 x ；检查唯一性；交换 x, y ；写明反函数定义域为原函数值域、反函数值域为原函数定义域。
- 使用提醒： $f^{-1}(x)$ 表示反函数，不是 $\frac{1}{f(x)}$ ；若解出多个分支，必须限制定义域或说明分支选择。
- 关联知识点：反函数（第1讲“反函数的定义、存在条件与图像关系”）。

水平线判别法

- 适用题型：判断一个已知函数是否存在反函数，尤其适合图像题和分段函数题。
- 触发特征：需要判断同一个函数值是否可能对应多个自变量。
- 核心步骤：在确认图像已经表示函数后，作水平线；若任意水平线与图像至多一个交点，则函数一一对应，有反函数。
- 使用提醒：铅直线判定“是不是函数”，水平线判定“有没有反函数”，两者不能混用。
- 关联知识点：反函数（第1讲“反函数的定义、存在条件与图像关系”）。

对数反函数中的倒数有理化法

- 适用题型：求 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 或同型函数的反函数。
- 触发特征：对数真数含有 $x + \sqrt{x^2 + 1}$ ，其倒数可通过有理化化为 $\sqrt{x^2 + 1} - x$ 。

- **核心步骤**: 由 $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 得一式; 再由倒数有理化得 $e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x$; 把两式看成关于 x 与 $\sqrt{x^2 + 1}$ 的方程组, 相减消去根式, 得到 $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 。
- **思维本质**: 主动制造第二个方程, 再联立消元; 这与 $f(x), f(1/x)$ 类题中的对偶代换方程组思维相通。
- **使用提醒**: 不要把 $f^{-1}(x)$ 理解为倒数; 求完表达式后必须写反函数定义域, 即原函数值域。
- **关联题目**: MATH1-CALC-0003。

整体视角反求中间函数

- **适用题型**: 已知 $f[\varphi(x)]$ 和外层函数 f , 要求 $\varphi(x)$ 及其定义域、值域。
- **触发特征**: 题设给出复合结果, 但中间函数未知, 例如 $f(x) = x^2, f[\varphi(x)] = G(x)$ 。
- **核心步骤**: 把 $\varphi(x)$ 当成整体变量; 由 $f(t)$ 的表达式建立关于 $\varphi(x)$ 的方程; 再用附加条件确定分支, 并检查定义域和值域。
- **使用提醒**: 若外层函数不是一一对应函数, 例如平方函数, 反求中间函数时必须处理正负分支。
- **关联题目**: MATH1-CALC-0004。

分段复合先判内层落段

- **适用题型**: 外层或内层为分段函数的复合函数, 如 $g[f(x)]$ 。
- **触发特征**: 外层函数的分段条件依赖其输入, 而输入本身是另一个函数值。
- **核心步骤**: 先写外层分段规则 $g(u)$, 再令 $u = f(x)$, 判断 $f(x)$ 落入外层哪一段, 最后代回化简。
- **使用提醒**: 外层函数的分段依据是内层输出, 不是原来的 x ; 边界点要先按内层函数定义判断。
- **关联题目**: MATH1-CALC-0005。

隐函数特殊点观察法

- **适用题型**: 已知 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数, 只要求 $y(x_0)$ 。
- **触发特征**: 代入 $x = x_0$ 后关于 y 的方程容易观察出解。
- **核心步骤**: 先代入 x_0 , 再观察明显根; 若需严谨, 补充单调性或图像交点唯一性。
- **使用提醒**: 不要为了求一个点强行显化整个隐函数。
- **关联知识点**: 隐函数 (第 1 讲 “隐函数的概念与观察法”)。

有界性放缩找上界

- **适用题型**: 证明函数在某区间上有界。

- **触发特征:** 目标可转化为寻找 M , 使 $|f(x)| \leq M$ 。
- **核心步骤:** 先取绝对值, 再用基本不等式、配方、分母放缩或端点分析寻找统一上界。
- **方法价值:** 若只需证明有界, 放缩通常能替代“求导判断单调性、找极值点、比较最大值”的较重路线。
- **使用提醒:** 讨论有界性必须说明区间; 若除以含 x 的量, 要单独检查零点; 若题目要求最值和取等条件, 再考虑极值法。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0006。

单调性定义法追踪不等号

- **适用题型:** 判断图像变换、复合或变号后的单调性。
- **触发特征:** 题设给出单调性定义或乘积判别式, 而不是导数。
- **核心步骤:** 设新函数 $F(x)$, 任取 $x_1 < x_2$, 追踪输入变换和外层变号造成的不等号变化。
- **使用提醒:** $f(-x)$ 会反转单调性, $-f(-x)$ 会再反一次。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0007。

函数方程赋值法

- **适用题型:** 已知对任意变量成立的函数方程, 证明奇偶性或求特殊值。
- **触发特征:** 题设含“任意 x, y ”并出现 $f(x+y)$ 、 $f(x-y)$ 等结构。
- **核心步骤:** 先令变量为 0 求 $f(0)$, 再令两个变量互为相反数或相等, 制造目标关系。
- **使用提醒:** 证明奇函数时, 目标是 $f(-x) = -f(x)$ 。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0008。

递推式证明周期性

- **适用题型:** 已知 $f(x) = f(x-a) + \varphi(x)$, 证明某个 T 是周期。
- **触发特征:** 题设能把 $f(x+a)$ 、 $f(x+2a)$ 逐步拉回 $f(x)$ 。
- **核心步骤:** 从目标 $f(x+T)$ 出发, 多次套用题设, 再利用新增项相互抵消。
- **使用提醒:** 证明 T 是周期不等于证明最小正周期。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0009。

对偶代换建立方程组

- **适用题型:** 关系式中同时出现 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 、 $f(-x)$ 、 $f(a-x)$ 等成对函数值。

- **触发特征：**目标是求 $f(x)$ ，但题设中还混有另一个函数值，需要通过自变量替换得到第二个方程。
- **核心步骤：**先把混合出现的函数值看作未知量，再做对应代换，如 $x \mapsto \frac{1}{x}$ ，联立方程并消去非目标项。
- **使用提醒：**代换前必须检查定义域封闭性；例如本题定义域为 $(0, +\infty)$ ，所以 $x > 0$ 时 $\frac{1}{x} > 0$ 。
- **关联题目：** MATH1-CALC-0002。

A.3 错题与错因索引

易错点

暂无错题。新增错题时同步记录题号、错因分类、错误步骤、正确做法和复盘提醒。

A.4 公式索引

知识点

倒数型整体换元恒等式

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2, \quad u \neq 0.$$

- **使用条件：**原式中出现 $u + \frac{1}{u}$ 或可通过同除 u^k 构造该整体，且 $u \neq 0$ 。
- **典型题型：**已知 $f\left(u + \frac{1}{u}\right)$ 反求 $f(x)$ ，以及含倒数结构的整体换元。
- **易错点：**不能把题设参数 u 与最终自变量 x 混用；若出现 $u - \frac{1}{u}$ ，还要额外关注分支和符号。
- **关联题目：** MATH1-CALC-0001。

反函数复合恒等式

设 $f: D \rightarrow R$ 一一对应，反函数为 $f^{-1}: R \rightarrow D$ ，则

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in R.$$

- **使用条件：**原函数必须在给定定义域上一一对应；第一个恒等式中 x 属于原函数定义域，第二个恒等式中 y 属于原函数值域。
- **典型题型：**反函数求值、复合函数化简、由图像或定义域值域判断反函数。

- **易错点:** $f^{-1}(x)$ 是反函数, 不是 $\frac{1}{f(x)}$; 若忽略变量范围, 可能把无定义的复合式误写成恒等式。
- **关联知识点:** 反函数 (第 1 讲 “反函数的定义、存在条件与图像关系”)。

倒数代换中的根式化简

当 $x > 0$ 时,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

- **使用条件:** 必须明确 $x > 0$ 。一般情况下 $\sqrt{x^2} = |x|$, 不能直接写成 x 。
- **典型题型:** 将关系式中的 x 换为 $\frac{1}{x}$ 后化简右端。
- **易错点:** 忘记绝对值导致符号错误。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0002。

反双曲正弦与双曲正弦互为反函数

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y \iff x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

等价地,

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- **使用条件:** $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$, 原函数在 $\mathbb{R}$ 上有定义并一一对应。
- **典型题型:** 求 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数, 或识别反双曲正弦、双曲正弦结构。
- **易错点:** 直接平方硬解容易变繁; 倒数有理化可直接得到 $e^{-y} = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0003。

复合函数定义域条件

若 f 的定义域为 D_f , g 的定义域为 D_g , 则

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

- **使用条件:** 先保证内层 $g(x)$ 有意义, 再保证内层输出能作为外层 f 的输入。
- **典型题型:** 复合函数定义域、分段函数复合、已知复合结果反求中间函数。
- **易错点:** 把复合函数定义域误认为内层函数定义域, 漏掉外层函数对内层输出的限制。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0004, MATH1-CALC-0005。

平方复合反求中间函数

若 $f(t) = t^2$, 且

$$f[\varphi(x)] = G(x),$$

则

$$[\varphi(x)]^2 = G(x).$$

若进一步已知 $\varphi(x) \geq 0$, 则

$$\varphi(x) = \sqrt{G(x)}.$$

- 使用条件: $G(x) \geq 0$, 并且必须有分支条件才能唯一确定 $\varphi(x)$ 。
- 典型题型: 已知平方型外层函数和复合结果, 反求内层函数。
- 易错点: 没有 $\varphi(x) \geq 0$ 等条件时, 不能只取正根。
- 关联题目: MATH1-CALC-0004。

函数有界性的定义

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 等价于存在正数 M , 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in I.$$

- 使用条件: 必须先明确讨论区间 I 。
- 典型题型: 证明函数有界, 或判断在不同区间上的有界性。
- 易错点: 只证明上有界而忘记下有界; 未取绝对值。
- 关联题目: MATH1-CALC-0006。

基本不等式型放缩

$$1 + x^2 \geq 2|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 使用条件: 由 $\frac{1+x^2}{2} \geq |x|$ 得到。
- 典型题型: 处理 $\frac{|x|}{1+x^2}$ 一类有界性证明。
- 易错点: 当需要除以 $|x|$ 时必须单独讨论 $x = 0$ 。
- 关联题目: MATH1-CALC-0006。

常见放缩公式清单

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0.$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

$$\sqrt{x^2 + a} \geq |x|, \quad a \geq 0.$$

若 $A, B, C > 0$, 且 $A \geq B$, 则

$$\frac{C}{A} \leq \frac{C}{B}.$$

- **使用条件:** 放缩时必须确认正负号, 尤其是分母放缩只在正分母下可直接保持方向。
- **典型题型:** 有界性、估值、极限夹逼、证明不等式、避免繁琐求导求最值。
- **易错点:** 放大分母会使正分式变小; 若分子或分母可能变号, 必须先取绝对值或分情况。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0006。

单调性的乘积判别式

对任意 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, 有

$$f \text{ 严格递增} \iff (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0,$$

$$f \text{ 严格递减} \iff (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0.$$

- **使用条件:** 在同一区间 I 内任取两点。
- **典型题型:** 无导数条件下判断或证明单调性。
- **易错点:** 忘记 $x_1 < x_2$ 时 $x_1 - x_2 < 0$, 导致符号判断反了。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0007。

奇偶函数判定与分解

$$f(-x) = f(x) \iff f \text{ 为偶函数}, \quad f(-x) = -f(x) \iff f \text{ 为奇函数}.$$

在定义域关于原点对称时,

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ 为偶函数}, \quad \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \text{ 为奇函数}.$$

- **使用条件:** 定义域必须关于原点对称。
- **典型题型:** 奇偶性证明、图像对称、函数方程赋值。
- **易错点:** 没有先检查定义域; 混淆奇函数和偶函数条件。
- **关联题目:** MATH1-CALC-0008。

周期函数的基本判定

$$f(x + T) = f(x) \quad (T \neq 0)$$

表示 T 是 $f(x)$ 的一个周期。

- **使用条件：**对定义域内所有相关 x 成立，且 $x + T$ 仍在定义域内。
- **典型题型：**由递推关系、三角诱导公式或复合结构证明周期性。
- **易错点：**证明一个周期不等于证明最小正周期。
- **关联题目：**MATH1-CALC-0009。